Κυρία Ξενοπούλου καλή σας ημέρα.

Δεν είμαι βέβαιος ποια είναι η σημασία του όρου «**αναδρομικός λογισμός**» που χρησιμοποιείτε. Στα μαθηματικά οι αναδρομικοί τύποι (σχέσεις) αναφέρονται περισσότερο στην ανάδραση και όχι στην αναδρομή. Δηλαδή το αποτέλεσμα που δίνει ένας τύπος, τον ανατροφοδοτεί για το επόμενο βήμα. Έτσι η αναδρομή αναφέρεται στα προηγούμενα βήματα του τύπου που μπορεί να μην έχουν καμία σχέση με τον χρόνο. Όταν αναφέρεστε σε «**αναδρομικό λογισμό**» υποθέτω πως εννοείτε αυτό που στα μαθηματικά λέγεται «**παραγωγικός λογισμός**» δηλαδή την μετάβαση από το όλον στο μέρος

Αν η υπόθεσή μου είναι πράγματι σωστή τότε, η ερώτηση σας άλλον σημαίνει:

Στα πλαίσια του παραγωγικού λογισμού, μπορούμε από το μέρος να συμπεράνουμε για το μέρος; (ε)

Η απάντηση με σαφή και κατηγορηματικό τρόπο είναι **ΟΧΙ** !

Ο παραγωγικός λογισμός είναι αυστηρά ο λογισμός με κατεύθυνση από το όλον στο μέρος. Προφανώς αφορά σε μια γνωστή καθολική ιδιότητα. Τα δε παραγωγικά συμπεράσματα δεν αμφισβητούνται λογικά με κανένα τρόπο.

Ο επαγωγικός λογισμός είναι ο λογισμός με αντίστροφη κατεύθυνση, δηλαδή από το μέρος προς το όλον. Προφανώς αφορά σε μια «ατομική» ιδιότητα που θέλουμε να την γενικεύσουμε. Ο επαγωγικός λογισμός δεν επιτρέπει την εξαγωγή ασφαλών συμπερασμάτων, άρα δεν μπορεί να θεωρηθεί αποδεικτική διαδικασία.[1(*)] Χρησιμοποιείται από όλες τις επιστήμες μόνο για παρατηρήσεις που οδηγούν σε διατύπωση θεωριών, οι οποίες **πρέπει να αποδειχτούν** αν θέλουμε να τις χρησιμοποιήσουμε σαν εφαλτήριο κάποιας παραγωγικής διαδικασίας.

Η διαδικασία «από μέρος σε μέρος» δεν είναι άλλο τι από μία συνεπαγωγή, η οποία πρέπει να αποδειχτεί μεμονωμένα και, εν γένει, ανεξάρτητα από επαγωγές ή παραγωγές. Στο σημείο αυτό θέλω να (ξανα-) επισημάνω ένα «λογικό ύφαλο»:

---

(1) Εξαίρεση αποτελεί η μαθηματική επαγωγή, η οποία στηρίζεται στο αξίωμα του Peano και για την ακρίβεια σε μία συνεπαγωγή η αλήθεια της οποίας αποδεικνύεται **αυτοτελώς** (σε σχέση με την επαγωγική διαδικασία της οποίας αποτελεί μέρος). Εδώ φοβάμαι πως γίνεται παρεξήγηση και θεωρείτε πως αυτή η τελευταία συνεπαγωγή γεννά το ερώτημα (ε).

<u>Το γεγονός ότι μια συνεπαγωγή είναι αληθής **δεν σημαίνει κατ' ανάγκη πως η υπόθεσή της και το συμπέρασμά της είναι αληθή**</u>**.**

Σας παραθέτω ένα σχετικό παράδειγμα.

Θεωρείστε τις προτάσεις:

$\mathfrak{p}$: «Ο αριθμός ν(ν+1) είναι περιττός (μονός) αριθμός για κάθε τιμή του φυσικού αριθμού ν»

$\mathfrak{q}$: «Ο αριθμός (ν+1)(ν+2) είναι περιττός αριθμός για κάθε τιμή του φυσικού αριθμού ν»

Θα αποδείξω ότι η συνεπαγωγή $\mathfrak{p} \Rightarrow \mathfrak{q}$ δηλαδή η πρόταση «*Αν ο αριθμός ν(ν+1) είναι περιττός (μονός) τότε και ο αριθμός (ν+1)(ν+2) είναι περιττός (μονός), για κάθε τιμή του φυσικού αριθμού* ν» είναι αληθής.

Πράγματι $(\nu+1)(\nu+2)=\nu^2+\nu+2\nu+2=\underbrace{\nu(\nu+1)}_{\text{περιττός (p)}}+\underbrace{2(\nu+1)}_{\text{άρτιος (ζυγός)}}$, που είναι άθροισμα ενός περιττού (πρόταση p) και ενός άρτιου (πολλαπλάσιο του 2), άρα είναι περιττός αριθμός.

Άρα η συνεπαγωγή είναι **βεβαιότατα αληθής**, όμως αν παρατηρήσετε προσεκτικά η πρόταση p είναι ψευδής, αφού πρόκειται για γινόμενο δύο διαδοχικών φυσικών αριθμών επομένως ο ένας απ' αυτούς θα είναι άρτιος, άρα και το γινόμενο θα είναι άρτιο.

Έχουμε δηλαδή την τέταρτη γραμμή του πίνακα.

$\mathfrak{p}$	$\mathfrak{q}$	$\mathfrak{p} \Rightarrow \mathfrak{q}$
Αληθής	Αληθής	Αληθής
Αληθής	Ψευδής	Ψευδής
Ψευδής	Αληθής	Αληθής
Ψευδής	Ψευδής	Αληθής

Αν τώρα δεν έχω ερμηνεύσει σωστά την ερώτησή σας (ε), θα προσπαθήσω με τρόπο απλό και όσο πιο σύντομο γίνεται να σας εξηγήσω το μαθηματικό μοντέλο που αφορά στις διμελείς σχέσεις. Το μοντέλο αυτό «καλύπτει» ΟΛΕΣ τις διμελείς σχέσεις που μπορεί να σκεφτεί ή να δημιουργήσει ο ανθρώπινος νους, χωρίς εξαιρέσεις! Έτσι ίσως ερμηνεύσετε και την απάντηση που σας έδωσαν στο forum.

Αν υποθέσουμε ότι έχουμε δύο σύνολα X και Y τότε, παίρνοντας ένα στοιχείο x από το X και ένα στοιχείο y από το Y, τότε ορίζεται το **διατεταγμένο** ζεύγος (x,y). O όρος «διατεταγμένο» σημαίνει αυστηρά ότι το ζεύγος (y,x) αν υπάρχει, είναι εντελώς διαφορετικό από το (x,y).

Αν με τον τρόπο αυτό φανταστούμε **όλα** τα διατεταγμένα ζεύγη που παράγονται για τα δεδομένα σύνολα X και Y τότε δημιουργείται το σύνολο XxY που λέγεται **καρτεσιανό γινόμενο των X και Y.**

Οποιοδήποτε σύνολο S υποσύνολο του καρτεσιανού γινομένου XxY λέγεται **διμελής σχέση των X και Y.**

Αν είστε εξοικειωμένη με τους μαθηματικούς συμβολισμούς, όλα τα προηγούμενα γράφονται:

$$X \times Y = \{(x,y) \therefore x \in X \wedge y \in Y, \quad \forall x \in X, \forall y \in Y\}$$ και

$$S \subseteq X \times Y.$$

Αν όχι τότε αγνοήστε τους.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας θα χρησιμοποιήσω ένα αριθμητικό παράδειγμα: Έστω το σύνολο $A = \{1,2,3,4,5,6\}$, δηλαδή το σύνολο που περιέχει τους ακέραιους από το 1 μέχρι και το 6. Σχηματικά μπορώ να συμβολίσω το καρτεσιανό γινόμενο AxA ως εξής:

AxA		Y=A					
		1	2	3	4	5	6
X=A	1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
	3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
	4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
	5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
	6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Μπορώ να ορίσω διάφορες διμελείς σχέσεις στο A, σκιάζοντας τα αντίστοιχα κελιά που την αποτελούν, για παράδειγμα:

- Τη διμελή σχέση S_1.

$S_1 \subset AxA$		Y=A					
		1	2	3	4	5	6
X=A	1	**(1,1)**	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	2	(2,1)	**(2,2)**	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
	3	(3,1)	(3,2)	**(3,3)**	(3,4)	(3,5)	(3,6)
	4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	**(4,4)**	(4,5)	(4,6)
	5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	**(5,5)**	(5,6)
	6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	**(6,6)**

Που δεν είναι άλλη από τη σχέση της ισότητας στο Α.
(Σχέση 1 προς 1 **του Α** (ολόκληρου) **πάνω στο Α** (ολόκληρο))

- Τη διμελή σχέση S_2.

$S_2 \subset AxA$		Y=A					
		1	2	3	4	5	6
X=A	1	**(1,1)**	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	2	**(2,1)**	**(2,2)**	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
	3	**(3,1)**	**(3,2)**	**(3,3)**	(3,4)	(3,5)	(3,6)
	4	**(4,1)**	**(4,2)**	**(4,3)**	**(4,4)**	(4,5)	(4,6)
	5	**(5,1)**	**(5,2)**	**(5,3)**	**(5,4)**	**(5,5)**	(5,6)
	6	**(6,1)**	**(6,2)**	**(6,3)**	**(6,4)**	(6,5)	**(6,6)**

Που δεν είναι άλλη από τη σχέση «$\geq$» στο Α.

(Σχέση **του Α** (ολόκληρου) **πάνω στο Α** (ολόκληρο))

- Τη διμελή σχέση S_3.

$S_3 \subset AxA$		Y=A					
		1	2	3	4	5	6
X=A	1	(1,1)	**(1,2)**	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	**(2,4)**	(2,5)	(2,6)
	3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	**(3,6)**
	4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
	5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
	6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Που δεν είναι άλλη από την εσωτερική σχέση «y διπλάσιο του x» στο Α.
(Σχέση **από το Α** (μέρος) **μέσα στο Α** (μέρος))

- Τη διμελή σχέση S_4.

$S_4 \subset AxA$		Y=A					
		1	2	3	4	5	6
X=A	1	**(1,1)**	**(1,2)**	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	2	**(2,1)**	**(2,2)**	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
	3	**(3,1)**	**(3,2)**	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
	4	**(4,1)**	**(4,2)**	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
	5	**(5,1)**	**(5,2)**	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
	6	**(6,1)**	**(6,2)**	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

(Σχέση **του Α** (ολόκληρου) **μέσα στο Α** (μέρος))

- Τη διμελή σχέση S_5.

$S_5 \subset AxA$		Y=A					
		1	2	3	4	5	6
X=A	1	(1,1)	**(1,2)**	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	2	**(2,1)**	**(2,2)**	**(2,3)**	**(2,4)**	**(2,5)**	**(2,6)**
	3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
	4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
	5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
	6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

(Σχέση **από το Α** (μέρος) **πάνω στο Α** (ολόκληρο))

Όπως βλέπετε ο χαρακτηρισμός «*όλο προς μέρος*» ή «*ένα προς όλα*» ή «*μέρος προς όλο*» κ.τ.λ. εξαρτάται από την ίδια τη σχέση και από τον τρόπο που αυτή ορίζεται.

Με αυτά πιστεύω ότι, θα απαντήσετε μόνη σας στο ερώτημα που βάζετε, το οποίο θεωρώ πως είναι ασαφές διότι δεν αναφέρετε **ποια ακριβώς είναι η διμελής σχέση** που σας ενδιαφέρει. Πρέπει να την ορίσετε με απόλυτη ακρίβεια, χωρίς ασάφειες και γενικότητες. Αυτό είναι εφικτό ακόμα και για αφηρημένες έννοιες, αρκεί το σύνολο Α να ορίζεται σωστά.

Ελπίζω να βοήθησα…

Η.Σ.